



ce  
pre  
UNI

**TEORÍA**

**Geometría**

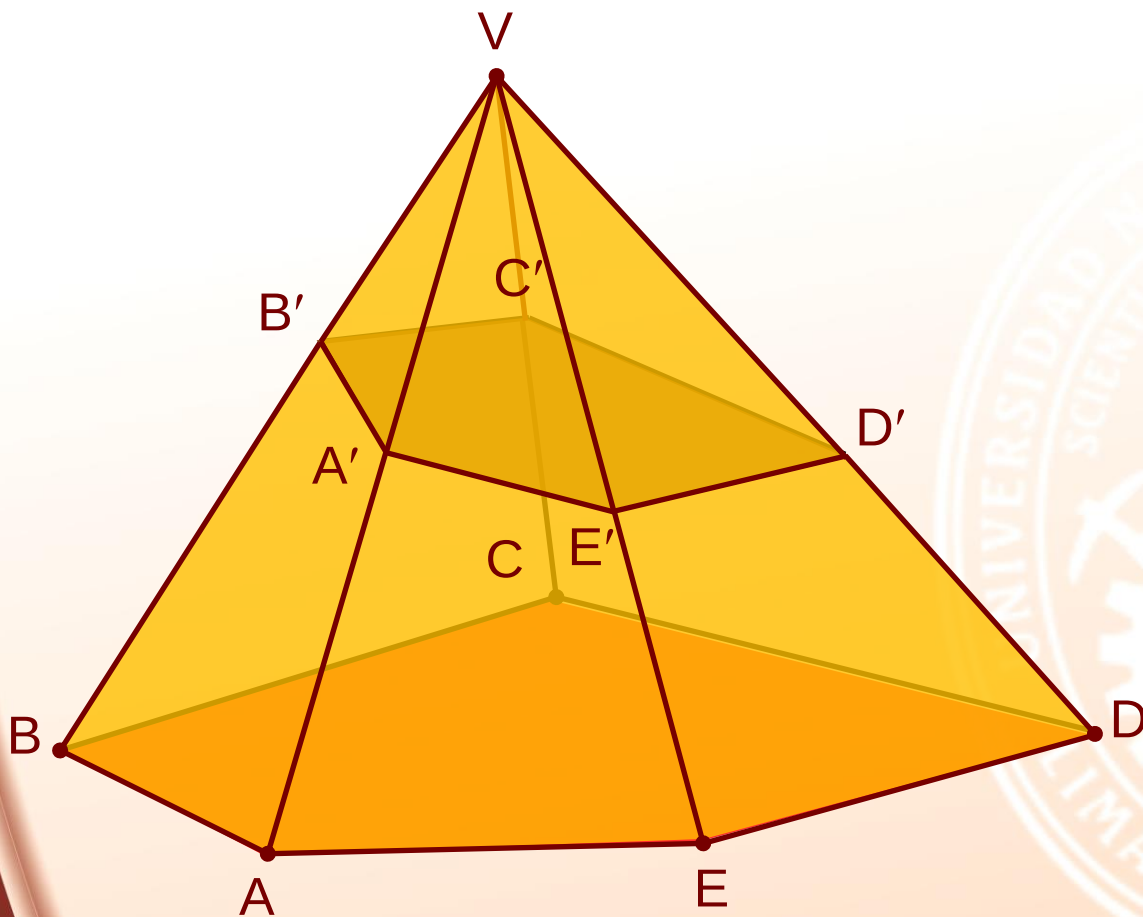
**TRONCO DE PIRÁMIDE**

**CICLO  
PRE  
2024-1**



# TRONCO DE PIRÁMIDE

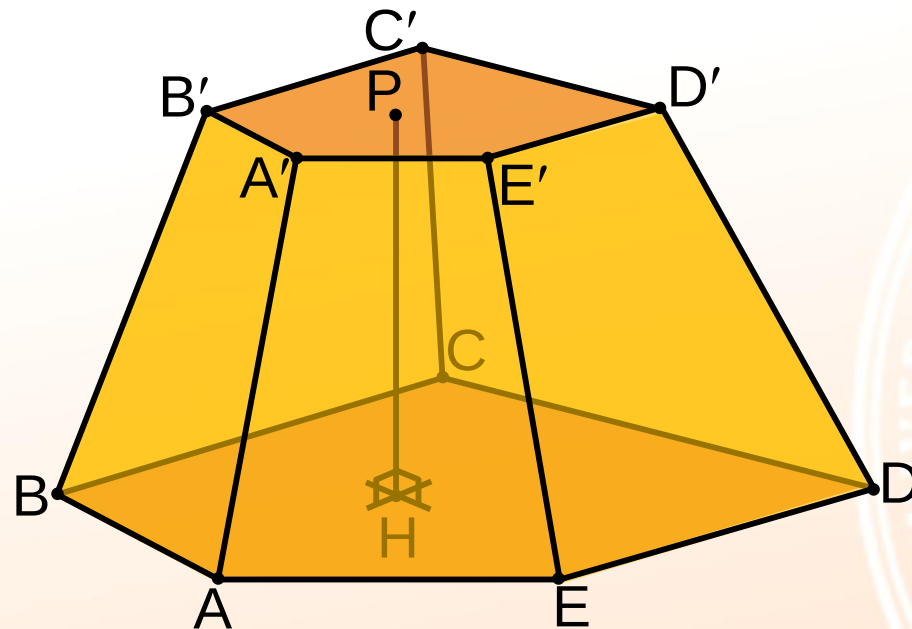
**Definición.-** Se denomina tronco de pirámide, al poliedro determinado por una pirámide y un plano secante a todas las aristas laterales.



$ABCDE-A'B'C'D'E'$  es un tronco de pirámide.  
Las caras  $ABCDE$  y  $A'B'C'D'E'$  se denominan bases.

# TRONCO DE PIRÁMIDE DE BASES PARALELAS

**Definición.-** Es el tronco de pirámide cuyas bases están contenidas en planos paralelos.



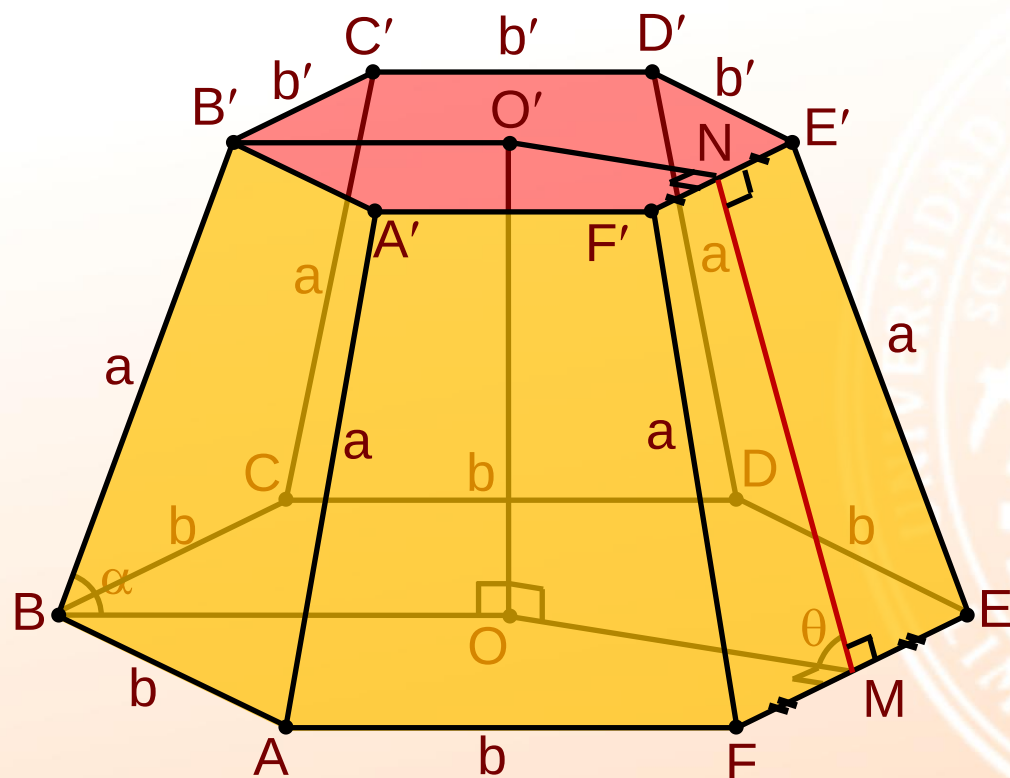
$ABCDE-A'B'C'D'E'$  es un tronco de pirámide de bases paralelas.

La altura de un tronco de pirámide de bases paralelas, es el segmento perpendicular a las bases, cuyos extremos pertenecen a los planos que contienen a las bases, por ejemplo,  $\overline{PH}$ .

Las caras laterales de un tronco de pirámide de bases paralelas son regiones trapeciales, por ejemplo,  $ABB'A'$ .

# TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

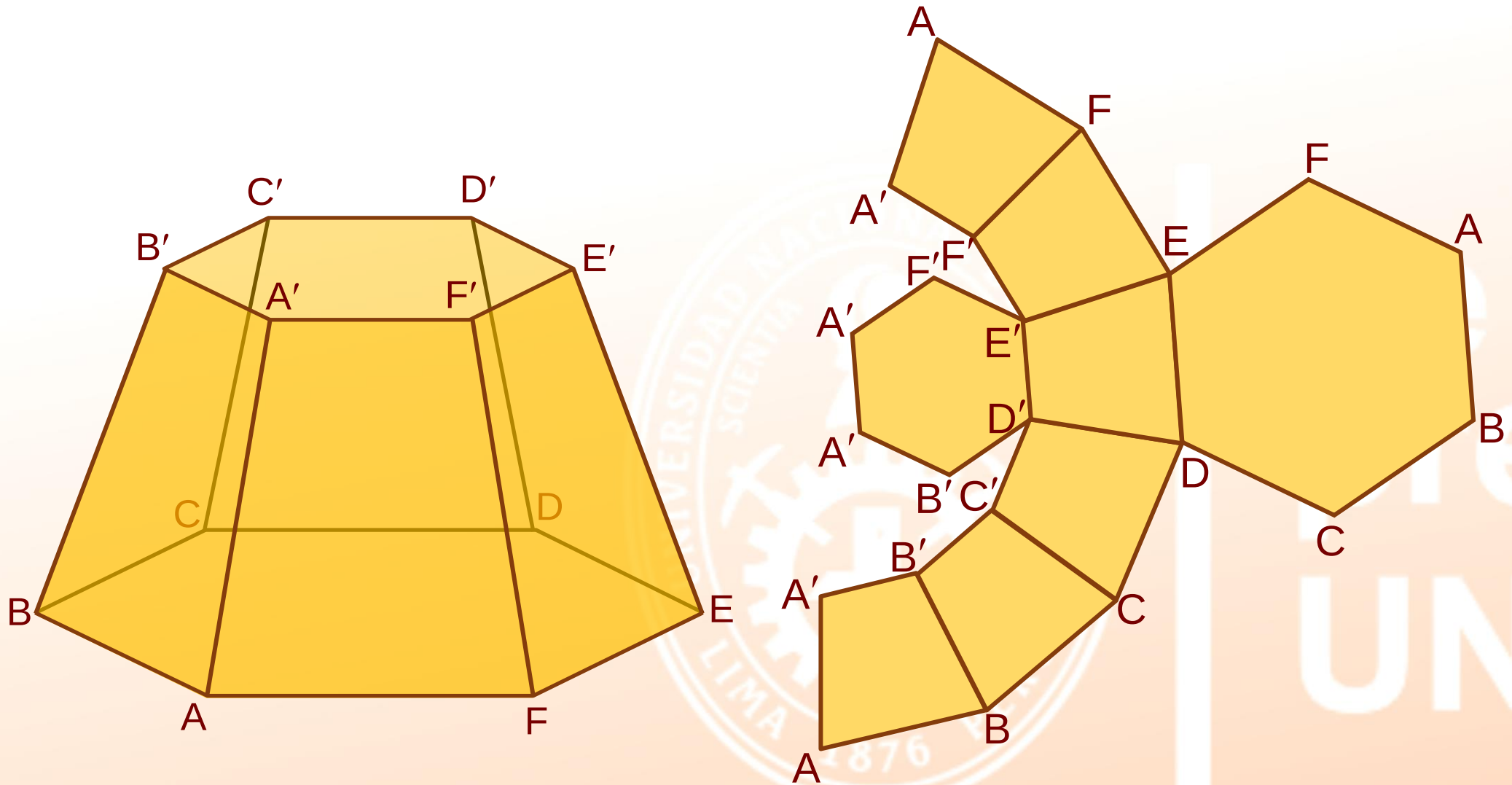
**Definición.-** Un tronco de pirámide de bases paralelas es regular, si las bases son regiones poligonales regulares y las caras laterales son regiones trapeciales isósceles congruentes.



$ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$  es un tronco de pirámide regular.

La apotema de un tronco de pirámide regular es el segmento cuyos extremos son los puntos medios de las bases de una cara lateral, por ejemplo,  $\overline{MN}$ .

# DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR



## Superficie lateral

Se denomina ***superficie lateral*** de un tronco de pirámide a la unión de todas las caras laterales del tronco de pirámide.

El ***área lateral*** de un tronco de pirámide es el área de la superficie lateral del tronco de pirámide y se denota por  $S_L$ .

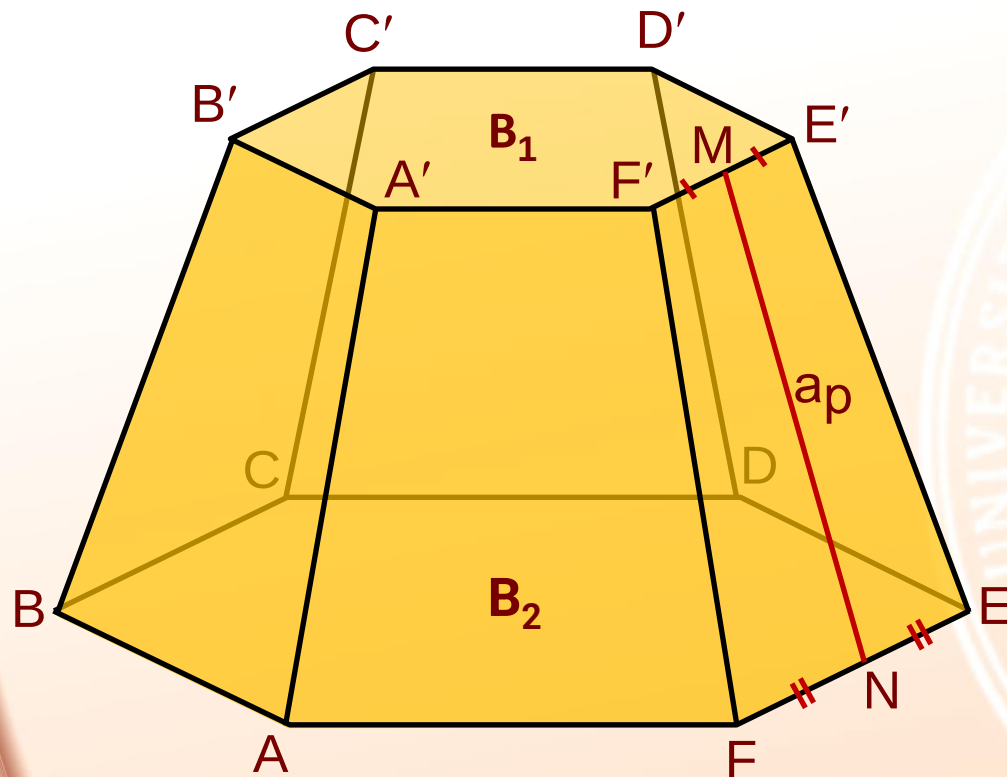
## Superficie Total

Se denomina ***superficie total*** de un tronco de pirámide a la unión de la superficie lateral y las bases del tronco de pirámide.

El ***área total*** de un tronco de pirámide es el área de la superficie total del tronco de pirámide y se denota por  $S_T$ .

# ÁREA LATERAL DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

**Teorema.-** El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto de la suma de los semiperímetros de las bases y la longitud del apotema.



Área lateral del tronco de pirámide regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F':

$$S_L = (p_{B_1} + p_{B_2})a_p$$

Donde:

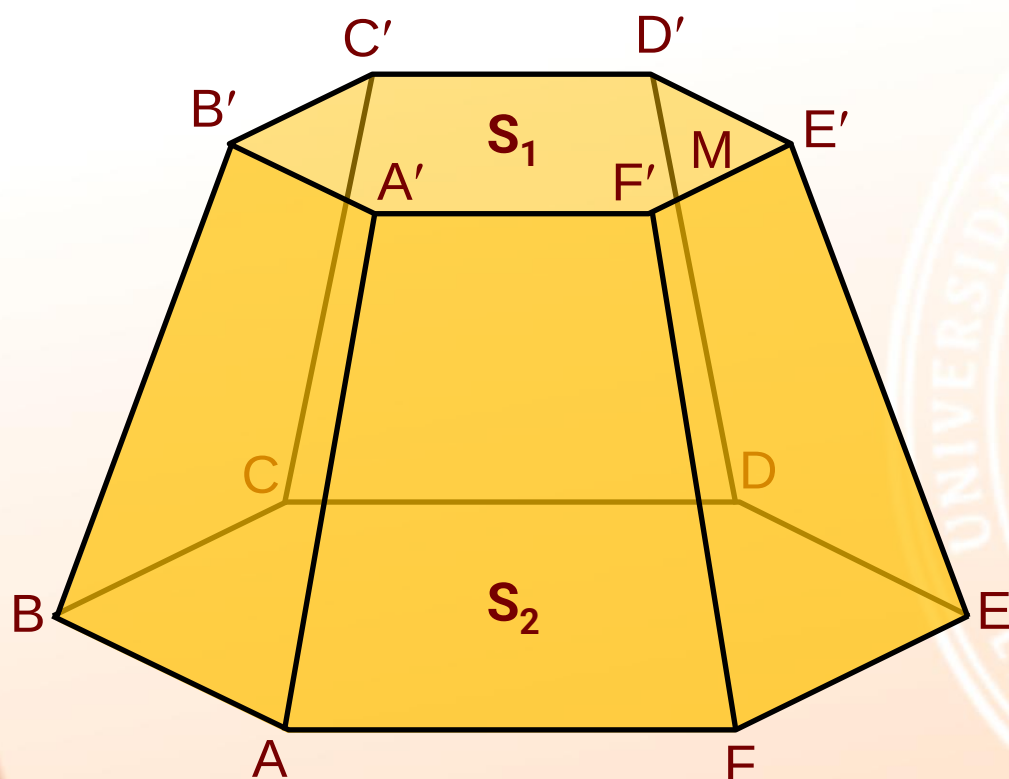
$p_{B_1}$  : semiperímetro de la base menor.

$p_{B_2}$  : semiperímetro de la base mayor.

$a_p$ : longitud del apotema del tronco.

# ÁREA TOTAL DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

**Teorema.-** El área total de un tronco de pirámide regular es igual a la suma de las áreas lateral y de las bases.



Área total del tronco de pirámide regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F':

$$S_T = S_L + S_1 + S_2$$

Donde:

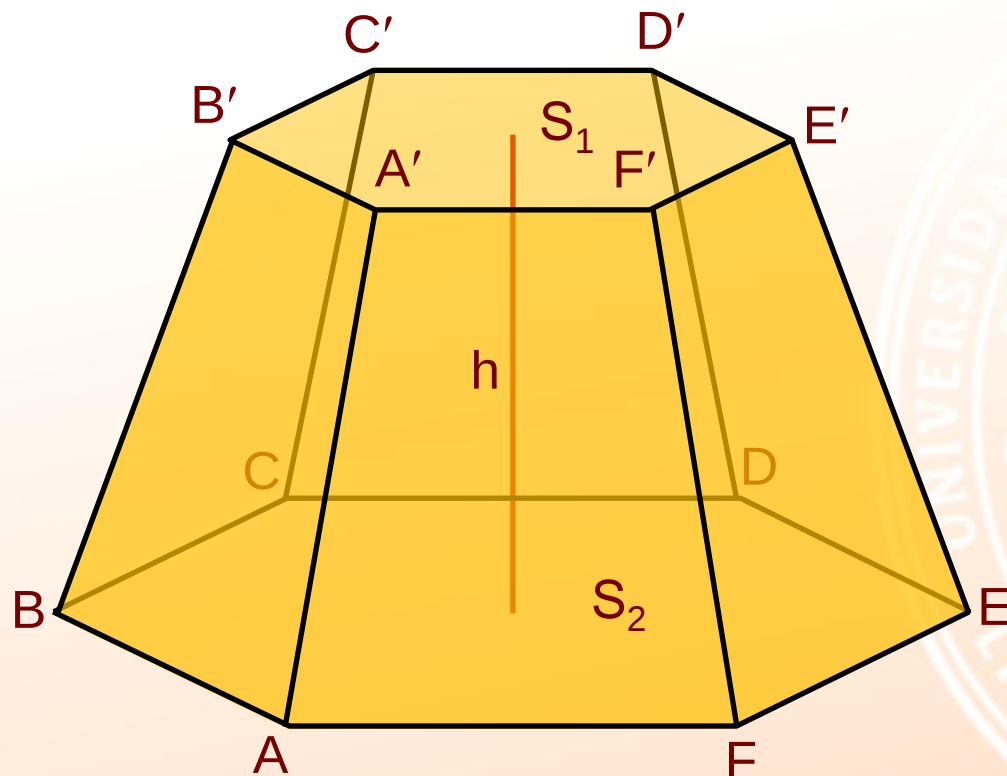
$S_L$ : área lateral.

$S_1$ : área de la base menor.

$S_2$ : área de la base mayor.

# VOLUMEN DEL SÓLIDO DETERMINADO POR UN TRONCO DE PIRÁMIDE DE BASES PARALELAS

**Teorema.-** El volumen del sólido determinado por un tronco de pirámide de bases paralelas es igual un tercio del producto de la longitud de la altura y la suma de las áreas de las bases con la media geométrica de las mismas.



ABCDEF-A'B'C'D'E'F' es un tronco de pirámide regular

$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

h: longitud de la altura.

$S_1$  : área de la base menor.

$S_2$  : área de la base mayor.

## EJERCICIO 01

En un tronco de pirámide regular ABCD-EFGH, el centro de la base mayor ABCD es O y AEO es un triángulo equilátero de perímetro 6 u. Calcule el volumen (en  $u^3$ ) del sólido determinado por el tronco de pirámide.

A)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

B)  $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

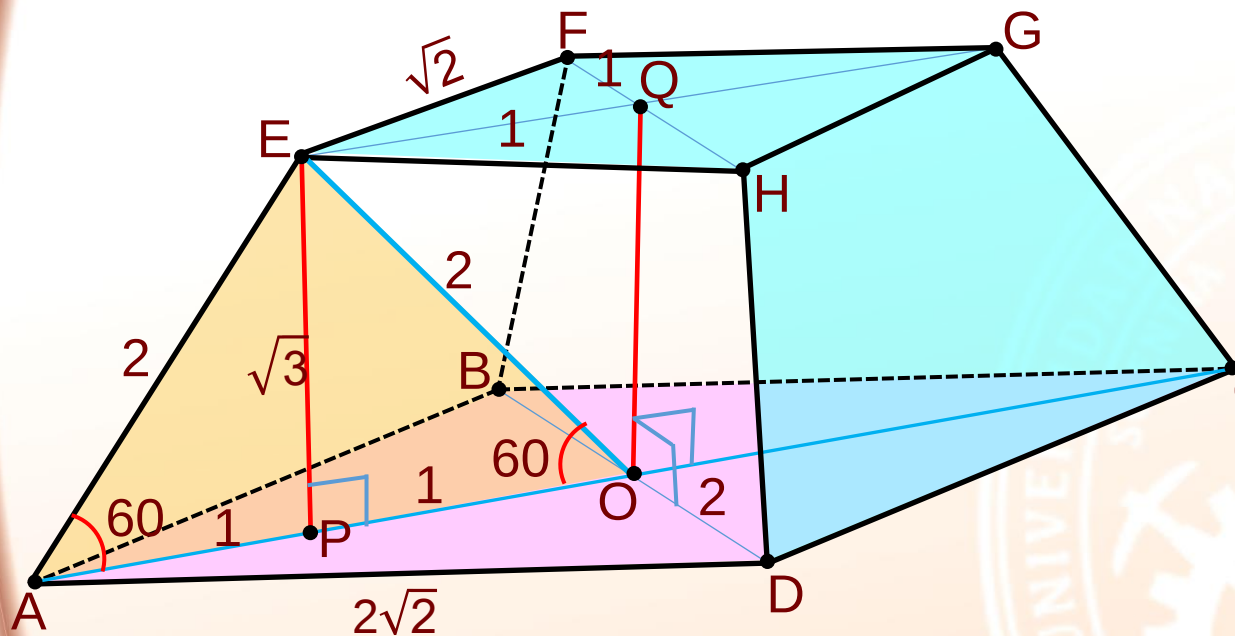
C)  $\frac{14\sqrt{2}}{3}$

D)  $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

E)  $\frac{14\sqrt{5}}{3}$

# RESOLUCIÓN 01

En un tronco de pirámide regular ABCD-EFGH, el centro de la base mayor ABCD es O y AEO es un triángulo equilátero de perímetro 6 u. Calcule el volumen (en  $u^3$ ) del sólido determinado por el tronco de pirámide.



- V es el volumen del sólido determinado por el tronco de pirámide:  $V = ?$
- Se traza  $\overline{EP} \perp$  base(ABCD),  $AP = PO = 1$
- $\triangle APE$  es notable de 30 y 60,  $EP = \sqrt{3}$
- $PO = EQ = 1$  y  $QF = 1 \Rightarrow EF = \sqrt{2}$
- $OD = 2 \Rightarrow AD = 2\sqrt{2}$
- $S_1 = (\sqrt{2})^2 = 2$      $S_2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$      $h = \sqrt{3}$
- $V = \frac{\sqrt{3}}{3} (2 + 8 + \sqrt{(2)(8)})$
- $V = \frac{14\sqrt{3}}{3}$

Clave: D

## EJERCICIO 02

En un tronco de pirámide regular ABCD-EFGH, O es el centro de la base mayor ABCD. Si  $m\angle EOG = 30$ ,  $OE = k$  y  $AC = k\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ , entonces el volumen del sólido determinado por el tronco es

A)  $\frac{5k^3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{12}$

B)  $\frac{7k^3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{12}$

C)  $\frac{11k^3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{12}$

D)  $\frac{5k^3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{6}$

E)  $\frac{5k^3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$

# RESOLUCIÓN 02

En un tronco de pirámide regular ABCD-EFGH, O es el centro de la base mayor ABCD. Si  $m\angle EOG = 30^\circ$ ,  $OE = k$  y  $AC = k\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ , entonces el volumen del sólido determinado por el tronco es

Dato :  $AC = k\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Por teorema:

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \quad \dots (1)$$

$$h = OQ = \frac{k}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

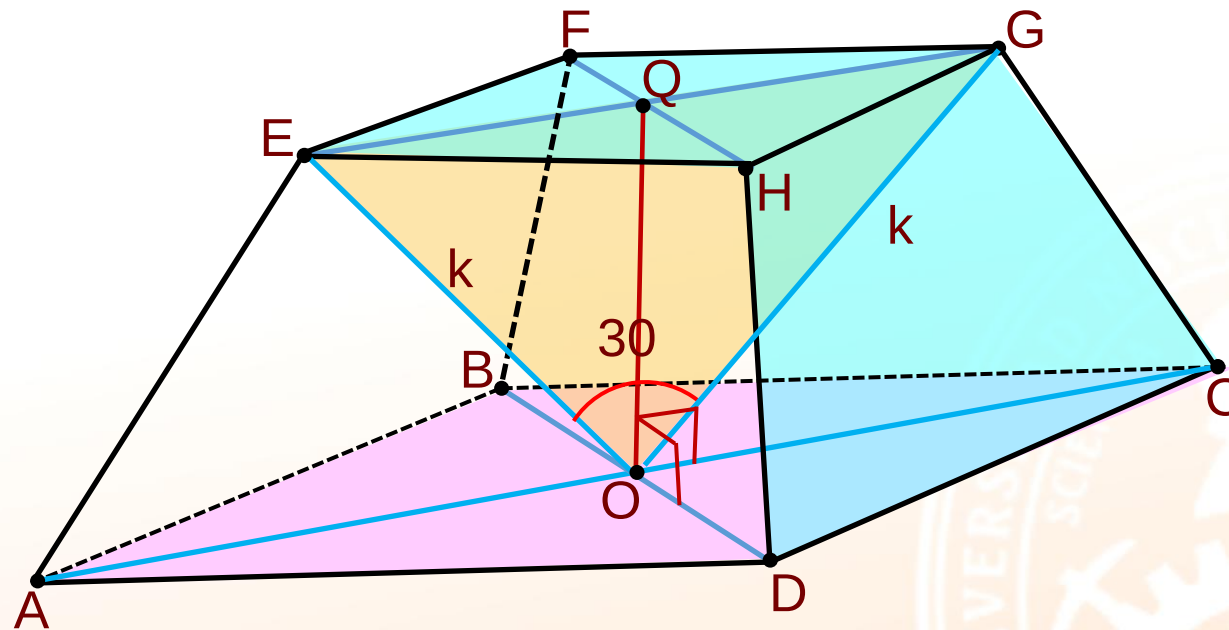
$$S_1 = S_{ABCD} = \frac{(AC)^2}{2} = \frac{k^2}{2} (2 + \sqrt{3})$$

$$S_2 = S_{EFGH} = \frac{(EG)^2}{2} = \frac{k^2}{2} (2 - \sqrt{3})$$

Reemplazando en 1:

$$V = \frac{5k^3 \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{12}$$

Clave: A



Volumen del tronco,  $V = ?$

$$\triangle EOG: EG = \ell_{12} = k\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$OQ = ap_{12} = \frac{k}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$



ce  
pre  
UNI

# TEORÍA

# Geometría

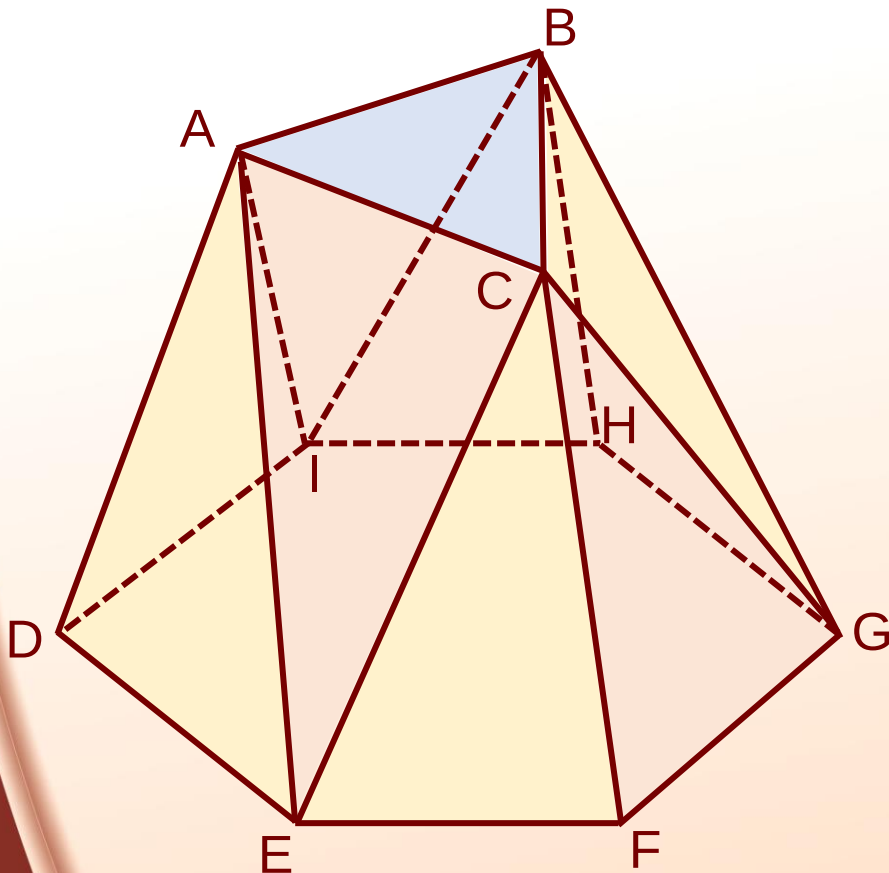
## PRISMOIDE

**CICLO  
PRE  
2024-1**



# PRISMOIDE

**Definición.-** Es el poliedro que tiene sus vértices contenidos en dos planos paralelos y las caras que no están contenidas en estos planos, pueden ser regiones triangulares, trapeciales o paralelogramáticas.



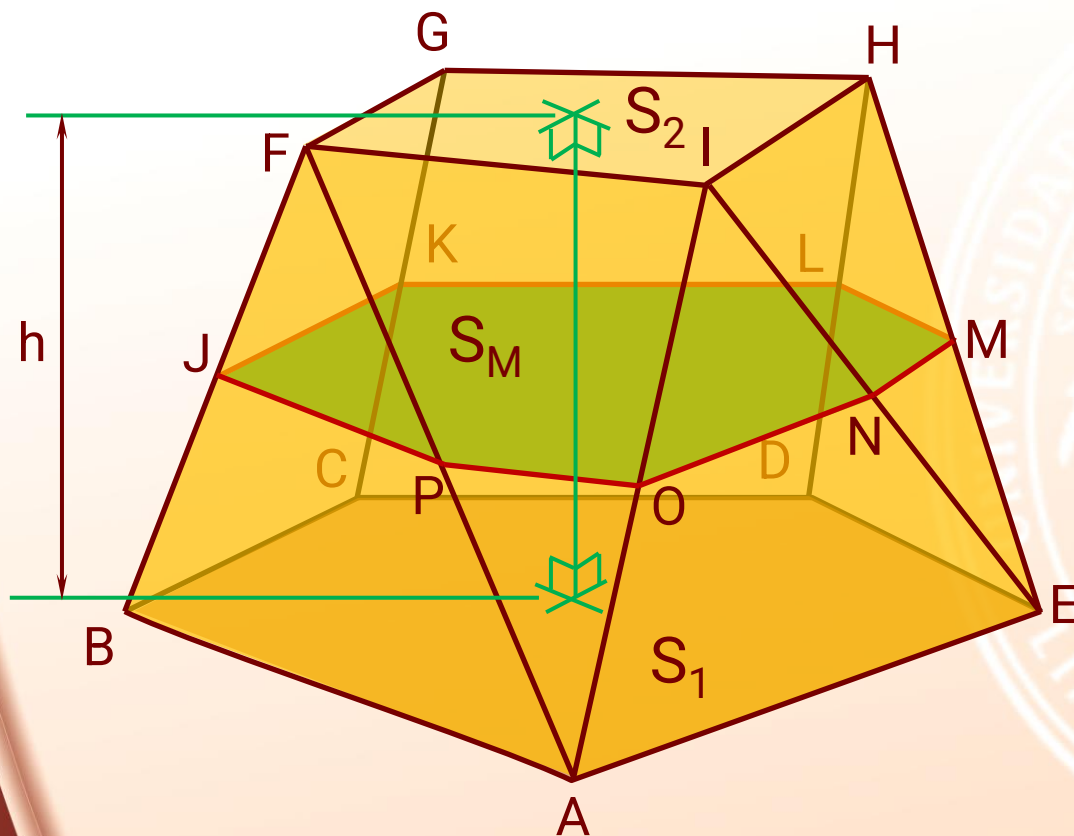
Si las caras  $ABC$  y  $DEFGHI$  son paralelas, entonces  $ABC-DEFGHI$  es un prismatoide.

Las bases de un prismatoide, son las caras paralelas  $ABC$  y  $DEFGHI$ .

Las caras laterales de un prismatoide, son las caras que no están contenidas por los planos que contienen a las bases, por ejemplo,  $ADE$  y  $CEF$ .

# VOLUMEN DEL SÓLIDO DETERMINADO POR UN PRISMOIDE

**Teorema.-** El volumen del sólido determinado por un prismoide es igual un sexto del producto de la longitud de la altura y la suma de las áreas de las bases y del cuádruplo del área de la sección media.



Volumen del prismatoide ABCDE-FGHI

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_M)$$

La sección media de un prismatoide, es la sección determinada por un plano que biseca a todas las aristas laterales, por ejemplo, JKLMNOP.